模块二 求通项与求和

第 1 节 数列通项的核心求法（★★★）

强化训练

1.（2022·上海模拟·★★）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+\lg\frac{n}{n-1}(n\geq 2)$，则 $a_{100}=$______.

答案：4

解析：观察递推公式发现可变形成 $a_n-a_{n-1}=f(n)$ 这种结构，故考虑用累加法求 a_{100}，

因为 $a_n=a_{n-1}+\lg\frac{n}{n-1}(n\geq 2)$，所以 $a_n-a_{n-1}=\lg\frac{n}{n-1}$，

故 $a_{100}-a_{99}=\lg\frac{100}{99}$，$a_{99}-a_{98}=\lg\frac{99}{98}$，$a_{98}-a_{97}=\lg\frac{98}{97}$，…，$a_3-a_2=\lg\frac{3}{2}$，$a_2-a_1=\lg\frac{2}{1}$，

以上各式相加得：$a_{100}-a_1=\lg\frac{100}{99}+\lg\frac{99}{98}+\lg\frac{98}{97}+\cdots+\lg\frac{3}{2}+\lg\frac{2}{1}=\lg(\frac{100}{99}\times\frac{99}{98}\times\frac{98}{97}\times\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{1})=\lg 100=2$，

又 $a_1=2$，所以 $a_{100}=a_1+2=4$.

2.（2022·长春模拟·★★）已知数列 a_1，$\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_3}{a_2}$，…，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$，…是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则下列数中是数列 $\{a_n\}$ 中的项的是（ ）

（A）16 （B）128 （C）32 （D）64

答案：D

解析：看到 a_1，$\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_3}{a_2}$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 这些式子，想到累乘即可得到 a_n，

由题意，$a_1=1$，$\frac{a_2}{a_1}=2^1$，$\frac{a_3}{a_2}=2^2$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$，

所以当 $n\geq 2$ 时，$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times 2^1\times 2^2\times\cdots\times 2^{n-1}=2^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，故 $a_4=2^6=64$，选 D.

3.（★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列. 证明：$\{a_n+n\}$ 是等比数列，并求 a_n.

证明：由题意，$\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是首项为 $a_2-2a_1=0$，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_{n+1}-2a_n=0+(n-1)\times 1=n-1$，故 $a_{n+1}=2a_n+n-1$ ①，

（要证 $\{a_n+n\}$ 是等比数列，只需证 $\frac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}$ 为常数，可先由式①凑出 $a_{n+1}+n+1$ 和 a_n+n）

由①可得 $a_{n+1}+n+1=2a_n+n-1+n+1=2(a_n+n)$ ②，

（还需验证首项不为 0 才是等比）

又 $a_1+1=2$，结合式②知 $\{a_n+n\}$ 的所有项均不为 0，

所以 $\dfrac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}=2$，从而 $\{a_n+n\}$ 是首项和公比均为 2 的等比数列，故 $a_n+n=2^n$，所以 $a_n=2^n-n$.

4．（2022・全国模拟・★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{2}$. 证明数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（要证 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列，只需证 $\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$ 为常数，故先由所给递推式凑出 $a_{n+2}-a_{n+1}$ 和 $a_{n+1}-a_n$）

由题意，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，两端同时减去 a_{n+1} 得：$a_{n+2}-a_{n+1}=3a_{n+1}-2a_n-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ ①，

（此时不要急于把 $a_{n+1}-a_n$ 除到左侧，需说明该数列所有项都不为 0）

又 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，所以 $a_2-a_1=1$，结合式①可得数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 所有项均不为 0，故 $\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2$，

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，故 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$，（要进一步求出 a_n，可用累加法）

所以当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases} a_2-a_1=2^0 \\ a_3-a_2=2^1 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_n-a_{n-1}=2^{n-2} \end{cases}$，将这些式子累加可得 $a_n-a_1=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}=\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}-1$，

故 $a_n=2^{n-1}-1+a_1=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$，又 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 也满足 $a_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}(n\ge 2)$，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$.

5．（2022・酒泉模拟・★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$. 设 $b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（要证 b_n 是等差数列，只需证 $b_{n+1}-b_n$ 为常数）

由题意，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}$ ①，

（要进一步计算此式，可将递推式代入，消去 a_{n+1} 再化简）

又 $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$，代入①得：$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{a_n}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a_n}}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_n}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_n-1}{a_n-1}=1$，

所以 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，

又 $a_1=2$，所以 $b_1=\dfrac{1}{a_1-1}=1$，故 $b_n=1+(n-1)\times 1=n$，

所以 $\dfrac{1}{a_n-1}=n$，故 $a_n=1+\dfrac{1}{n}$.

6.（2023 • 全国模拟 • ★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}-2a_n=3^n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解法 1：（由本节例 1 变式 2 知可在$a_{n+1}-2a_n=3^n$的两端同除以2^{n+1}，转化成用累加法处理的结构）

因为$a_{n+1}-2a_n=3^n$，所以$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^n$，

设$b_n=\frac{a_n}{2^n}$，则$b_1=\frac{a_1}{2^1}=\frac{1}{2}$，且$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^n$，

所以当$n\ge 2$时，$b_2-b_1=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^1$，$b_3-b_2=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^2$，…，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-1}$，

将以上各式累加可得$b_n-b_1=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^1+\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^2+\cdots+\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}+\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-1}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}[1-(\frac{3}{2})^{n-1}]}{1-\frac{3}{2}}=(\frac{3}{2})^n-\frac{3}{2}$，

所以$b_n=(\frac{3}{2})^n-\frac{3}{2}+b_1=(\frac{3}{2})^n-1$，又$b_1=\frac{1}{2}$也满足上式，故$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$b_n=(\frac{3}{2})^n-1$，

即$\frac{a_n}{2^n}=(\frac{3}{2})^n-1$，所以$a_n=3^n-2^n$.

解法 2：（像$a_{n+1}-2a_n=3^n$这种递推公式，也可用构造法求通项，针对3^n这部分，可构造出前后项分别为$A\cdot 3^n$和$A\cdot 3^{n+1}$，故可设$a_{n+1}+A\cdot 3^{n+1}=2(a_n+A\cdot 3^n)$，即$a_{n+1}=2a_n-A\cdot 3^n$，与$a_{n+1}=2a_n+3^n$对比可得$A=-1$）

因为$a_{n+1}-2a_n=3^n$，所以$a_{n+1}=2a_n+3^n$，故$a_{n+1}-3^{n+1}=2a_n+3^n-3^{n+1}=2a_n-2\times 3^n=2(a_n-3^n)$ ①，

（此时不要急于把a_n-3^n除到左侧，先判断其是否可能为 0）

因为$a_1=1$，所以$a_1-3^1=-2\ne 0$，结合式①可知数列$\{a_n-3^n\}$所有项均不为 0，故$\frac{a_{n+1}-3^{n+1}}{a_n-3^n}=2$，

所以$\{a_n-3^n\}$是首项为-2，公比为 2 的等比数列，从而$a_n-3^n=-2\times 2^{n-1}=-2^n$，故$a_n=3^n-2^n$.

7.（2023 • 河北模拟 • ★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}=2a_n+n$，若$b_n=2^n-a_n$，求$\frac{b_n-1}{(b_n+1)^2}$的最大值.

解：（先由$a_{n+1}=2a_n+n$求a_n，可用构造法，递推式中除a_{n+1}和a_n外，余下部分是关于n的一次函数，这类结构可构造前后项分别为$An+B$和$A(n+1)+B$，故可设$a_{n+1}+A(n+1)+B=2(a_n+An+B)$，即$a_{n+1}=2a_n+An+B-A$，与$a_{n+1}=2a_n+n$对比可得$\begin{cases}A=1\\B-A=0\end{cases}$，所以$A=B=1$，构造的方法就出来了）

因为$a_{n+1}=2a_n+n$，所以$a_{n+1}+(n+1)+1=2(a_n+n+1)$ ①，

又$a_1=0$，所以$a_1+1+1=2\ne 0$，结合式①知数列$\{a_n+n+1\}$所有项均不为 0，

从而$\{a_n+n+1\}$是首项和公比均为 2 的等比数列，故$a_n+n+1=2^n$，所以$a_n=2^n-n-1$，故$b_n=2^n-a_n=n+1$，

所以$\frac{b_n-1}{(b_n+1)^2}=\frac{n+1-1}{(n+1+1)^2}=\frac{n}{n^2+4n+4}=\frac{1}{n+\frac{4}{n}+4}\le\frac{1}{2\sqrt{n\cdot\frac{4}{n}}+4}=\frac{1}{8}$，

当且仅当$n=\frac{4}{n}$，即$n=2$时取等号，故$\frac{b_n-1}{(b_n+1)^2}$的最大值为$\frac{1}{8}$.

8．（★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$(2n-1)a_{n+1}-(2n+1)a_n=2$，求$a_n$.

解：（观察递推公式，发现有大下标的乘小系数，小下标的乘大系数的特征，故同除以系数）

由题意，$(2n-1)a_{n+1}-(2n+1)a_n=2$，两端同除以$(2n-1)(2n+1)$得$\dfrac{a_{n+1}}{2n+1}-\dfrac{a_n}{2n-1}=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ ①，

（把$\dfrac{a_n}{2n-1}$看作整体，式①属于用累加法求通项的情形，右侧的$\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$恰好也可裂项求和）

设$b_n=\dfrac{a_n}{2n-1}$，则$b_1=a_1=1$，且式①即为$b_{n+1}-b_n=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$，故当$n\ge 2$时，有

$b_2-b_1=1-\dfrac{1}{3}$，$b_3-b_2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}$，$b_4-b_3=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}$，…，$b_{n-1}-b_{n-2}=\dfrac{1}{2n-5}-\dfrac{1}{2n-3}$，$b_n-b_{n-1}=\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}$，

以上各式累加可得$b_n-b_1=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n-5}-\dfrac{1}{2n-3}+\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}=1-\dfrac{1}{2n-1}$，

因为$a_1=1$，所以$b_n=b_1+1-\dfrac{1}{2n-1}=2-\dfrac{1}{2n-1}=\dfrac{4n-3}{2n-1}$，即$\dfrac{a_n}{2n-1}=\dfrac{4n-3}{2n-1}$，故$a_n=4n-3(n\ge 2)$，

又$a_1=1$也满足上式，所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=4n-3$.

9．（2022•全国模拟•★★★★）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$(n^2+1)a_{n+1}=2(n^2-2n+2)a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：（观察递推公式发现可变形成$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$这种结构，故考虑累乘法求通项）

因为$(n^2+1)a_{n+1}=2(n^2-2n+2)a_n$，所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2(n^2-2n+2)}{n^2+1}$，

（为了便于累乘时约分，我们把分子配方，变形成和分母一致的结构）故$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2[(n-1)^2+1]}{n^2+1}$，

所以当$n\ge 2$时，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2}{1^2+1}$，$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{2\times(1^2+1)}{2^2+1}$，$\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{2\times(2^2+1)}{3^2+1}$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{2[(n-3)^2+1]}{(n-2)^2+1}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2[(n-2)^2+1]}{(n-1)^2+1}$，

将以上各式累乘可得：$\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{2}{1^2+1}\times\dfrac{2\times(1^2+1)}{2^2+1}\times\dfrac{2\times(2^2+1)}{3^2+1}\times\cdots\times\dfrac{2[(n-3)^2+1]}{(n-2)^2+1}\times\dfrac{2[(n-2)^2+1]}{(n-1)^2+1}=\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)^2+1}$，

又$a_1=2$，所以$a_n=\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)^2+1}a_1=\dfrac{2^n}{(n-1)^2+1}$，

因为$a_1=2$也满足上式，所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=\dfrac{2^n}{(n-1)^2+1}$.

10．（2023•安徽模拟•★★★★）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_n(a_{n+1}-a_n)-3a_n+2a_{n+1}-2=0$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（所给递推公式结构复杂，应先尝试对其变形，因式分解是可以考虑的方向，先把括号打开）

因为$a_n(a_{n+1}-a_n)-3a_n+2a_{n+1}-2=0$，所以$a_na_{n+1}-a_n^2-3a_n+2a_{n+1}-2=0$，

（此时观察可知a_na_{n+1}和$2a_{n+1}$可提公因式a_{n+1}，$-a_n^2-3a_n-2$也可分解成$-(a_n+1)(a_n+2)$）

从而$a_{n+1}(a_n+2)-(a_n+2)(a_n+1)=0$，故$(a_n+2)(a_{n+1}-a_n-1)=0$，

又$\{a_n\}$是正项数列，所以$a_n+2>0$，从而$a_{n+1}-a_n-1=0$，故$a_{n+1}-a_n=1$，

结合$a_1=1$可得$\{a_n\}$是首项和公差都为1的等差数列，所以$a_n=1+(n-1)\times 1=n$.

11.（2023·福建质检·★★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=8$，$a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，$a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$，证明：$\{a_{2n-1}\}$是等差数列.

证明：（条件的两个等式分别为对数、指数结构，不妨把指数结构取对数，统一起来再看）

由$a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$可得$\log_2(a_{2n}a_{2n+2})=\log_2 16^{a_{2n+1}}$，

所以$\log_2 a_{2n}+\log_2 a_{2n+2}=4a_{2n+1}$ ①，

（要证的是$\{a_{2n-1}\}$为等差数列，故应消去①中左侧的两项，可将题干的另一等式进n并代入）

因为$a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，所以$a_{2n+1}+a_{2n+3}=\log_2 a_{2n+2}$，

将上述两式代入①得$(a_{2n-1}+a_{2n+1})+(a_{2n+1}+a_{2n+3})=4a_{2n+1}$，

所以$a_{2n+3}-a_{2n+1}=a_{2n+1}-a_{2n-1}$，故$\{a_{2n-1}\}$是等差数列.

【反思】本题由于条件一个是指数式、一个是对数式，不统一，所以我们将指数式取对数，统一结构，这种操作思想在其它章节偶尔也会用到.